Proprietà Utili

$e^A : M(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$

a) $\|e^{A+B} - e^A\| \leq \|B\| \, e^{\|A\|} \cdot e^{\|B\|}$

b) $e^0 = I$

c) $e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A} = e^{(\alpha+\beta)A}$

d) $e^A e^{-A} = I$

e) $AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{AB}$

f) B è invertibile $\Rightarrow e^{BAB^{-1}} = B e^A B^{-1}$

g) $\det(e^A) = e^{tr(A)}$

h) $(e^A)^t = e^{At}$

i) $A \in Sm(n,\mathbb{R}) \Rightarrow e^A \in Sm(n,\mathbb{R})$

$A \in Anti\,Sm(n,\mathbb{R}) \Rightarrow e^A \in O(n,\mathbb{R})$

l) $(e^A)^+ = e^{A^+}$

m) $A \in He(n,\mathbb{C}) \Rightarrow e^A \in He(n,\mathbb{C})$

$A \in Anti\,He(n,\mathbb{C}) \Rightarrow e^A \in U(n,\mathbb{C})$

n) e^A è invertibile $\forall A \in M(n,\mathbb{C})$

o) $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA} \cdot A \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in M(n\,\mathbb{C})$

p) $\left(\frac{d}{dt} e^{A(t)}\right) \cdot e^{-A(t)} = \frac{d}{dt} A(t) + \frac{1}{2!}\left[A(t), \frac{d}{dt} A(t)\right] + \frac{1}{3!}\left[A(t), \left[A(t), \frac{d}{dt} A(t)\right]\right] - \dots$

master copy


master
COPY


master
COPY


master
COPY

Theorem:

1 (Gruppi in generale) Omomorfismi - Classi di Equivalenza - etc

Theorema (Proprietà delle classi di Equivalenza) T001

$(H,*) \leq (G,*)$

$\sim$ tc $a \sim b \iff a \equiv b \bmod H \iff ab^{-1} \in H$

$[g] = \{ h*g \text{ tc } h \in H \} = Hg$

$[g]^* = \{ g*h \text{ tc } h \in H \} = gH$

$\sim^*$ tc $a \sim^* b \iff b^{-1}a \in H$

A) $[g] = [g]^* \iff Hg = gH$

$\Rightarrow$ B) $a \not\sim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

C) $G = \bigsqcup_{g \in G} [g]$

Lemma (Caratterizzazione Omomorfismi di gruppi) T002

$\phi: (G_1, *_1) \to (G_2, *_2)$ omomorfismo

$\Rightarrow$ A) ϕ è iniettivo $\iff \ker(\phi) = e_1$

B) ϕ è suriettivo $\iff \mathrm{Imm}(\phi) = G_2$

Lemma (Composizione di Omomorfismi) T003

$\phi: (G_1, *_1) \to (G_2, *_2)$ omomorfismi $\Rightarrow \psi \circ \phi: (G_1, *_1) \to (G_3, *_3)$ omomorfismo

$\psi: (G_2, *_2) \to (G_3, *_3)$

Lemma (Omomorfismo e commutatività) T004

$(G_1, *_1) \approx (G_2, *_2) \Rightarrow G_1$ è abeliano $\iff G_2$ è abeliano

Theorema (Gruppi con Cardinalità Pari) T005

$(G,*)$ gruppo tc $\#(G) = 2m < \infty \Rightarrow \exists$ almeno un $\tilde{g}$ tc $\tilde{g}^2 = e$, $\tilde{g} \in G$



2] Sottogruppi, Sottogruppi invarianti, Gruppo Quoziente

Theorema (Criterio [NS] per Sottogruppo)

- $(G,*)$ gruppo
- $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$ t.c.
- $\forall h_1, h_2 \in H$, $h_1 h_2^{-1} \in H$

$\Longleftrightarrow (H,*) \leq (G,*)$

Theorema (Criterio [S] per sottogruppo Invariante)

$(H,*) \trianglelefteq (G,*)$ t.c.

A) $H = \bigcup_{g \in G' \subseteq G} [g]$

$\Longrightarrow (H,*) \trianglelefteq (G,*)$

$\Updownarrow$

B) $gH = Hg$, $\forall g \in G$

Theorema (Automorfismo e sottogruppo Invariante)

$\phi : (G,*) \to (G,*)$ automorfismo $\Longrightarrow (\ker(\phi), *) \trianglelefteq (G,*)$

Lemma (Gruppo Invariante e Gruppo Quoziente)

$H \trianglelefteq G \Longrightarrow$ A] $gH = Hg$, $\forall g \in G$

B] $\#(G|H) = \frac{\#(G)}{\#(H)}$

Theorema (del Massimo Sotto-gruppo Invariante)

- $(G,*)$ gruppo
- $H \trianglelefteq G$
- $Q = G|H$

, Q è semplice $\Longrightarrow H$ è il massimo sottogruppo invariante di G

Lemma (Proprietà della Proiezione Canonica sul gruppo Quoziente)

$P : G \to G|H$ t.c. $P(g) = [g]$, $\forall g \in G$

$\Longrightarrow$ A) $P(g_1 * g_2) = P(g_1) * P(g_2)$ (omomorfismo) $\forall g_1, g_2 \in G$

B) P è suriettiva

C) $\ker(P) = H$

Lemma (Prodotto Diretto di Sottogruppi)

(G,F) prodotto di $G, F \Rightarrow$ A] $(a,b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$

B] $G \trianglelefteq (G,F)$

$F \trianglelefteq (G,F)$

C] $\#(G,F) = \#(G) \cdot \#(F)$

master copy

Esempi di Sottogruppi Invarianti

$Z_2 = \{1, -1\}$ $\Rightarrow$ 1) $\boxed{Z_2 \trianglelefteq Z_4}$ 2) $\boxed{Z_4 \trianglelefteq Q}$

$Z_4 = \{1, -1, i, -i\}$

$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ 3) $\boxed{Z_3 \trianglelefteq S_3}$

$S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$

$= \{(1)(2)(3), (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1)(2\,3), (1\,3)(2), (1\,2)(3)\}$

Theorema

$(H,*) \trianglelefteq (G,*)$, $(G,*)$ abeliano $\Rightarrow$ $(H,*)$ abeliano

$(G,*)$ ciclico $\Rightarrow$ $(H,*)$ è ciclico

Theorema

$(H,*) \trianglelefteq (G,*) \Rightarrow (H,*) \trianglelefteq (G,*)$

$(G,*)$ abeliano

Theorema

$(H_1,*) \trianglelefteq (G,*) \Rightarrow (H_1 \otimes H_2) \trianglelefteq (G,*)$

$(H_2,*) \trianglelefteq (G,*)$

Theorema

$(H,*) \trianglelefteq (G,*)$ tc $\Rightarrow (H,*) \trianglelefteq (G,*)$

$\#(gH) = \min(\text{Divisori di } \#(G))$

$\#(gH)$ è primo

Corollario

$(H,*) \trianglelefteq (G,*)$ tc $\Rightarrow (H,*) \trianglelefteq (G,*)$

$\#(gH) = 2$

master COPY